Abbiamo capito che le radici semplici sono tutto quello che serve per descrivere un'algebra.

Supponiamo che c'è un prodotto scalare tra radici $\langle \, , \, \rangle$

e che le radici semplici devono essere linearmente indipendenti

Allora definiamo

$$M_{ij} := \frac{2 \langle \gamma_i \gamma_j \rangle}{\langle \gamma_j \gamma_j \rangle}$$

e indichiamo come ammissibile l'algebra se

1) $\det M_{ij} \neq 0$ $\quad$ ($\Longleftrightarrow$ γ_i linearmente indipendenti)

2) $M_{ij} \leq 0 \quad i \neq j$

3) $M_{ij} M_{ji} = \{0, 1, 2, 3\}$

Seguono una serie di Lemmi

Lemma dei cicli chiusi

Definiamo $\gamma = \sum^{N} \hat{\gamma}_i = \sum_i \gamma_i \frac{1}{\sqrt{\langle \gamma_i \gamma_i \rangle}}$

$\gamma \neq 0$ poiché $\det M \neq 0$

$\langle \gamma \gamma \rangle > 0$ (è un vettore non nullo in uno spazio vettoriale normato)

$$0 < \langle \gamma \gamma \rangle = \sum_{ij} \frac{\overbrace{\langle \gamma_i \gamma_j \rangle}^{\substack{>0 \text{ se } i=j \\ <0 \text{ se } i\neq j}}}{\sqrt{\langle \gamma_i \gamma_i \rangle \langle \gamma_j \gamma_j \rangle}} =$$

$$= \sum_{i=j} 1 - \sum_{i\neq j} \frac{\sqrt{|\langle \gamma_i \gamma_j \rangle|}\sqrt{|\langle \gamma_i \gamma_j \rangle|}}{\sqrt{\langle \gamma_i \gamma_i \rangle \langle \gamma_j \gamma_j \rangle}}$$

$$= N - 2 \sum_{j \& i>j} \left(\frac{|\langle \gamma_i \gamma_j \rangle| |\langle \gamma_j \gamma_i \rangle|}{\langle \gamma_i \gamma_i \rangle \langle \gamma_j \gamma_j \rangle} \right)^{1/2}$$

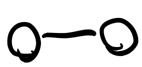
$$= N + \sum_{j \& i>j} - \underbrace{\sqrt{M_{ij} M_{ji}}}$$

≥ 1

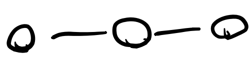
$$0 < \underbrace{N}_{\text{n punti nel Dynkin Diagram}}^{\|\pi_\sigma^+\|} - \sum_{j \neq i, j} \overbrace{\sqrt{M_{ij} M_{ji}}}^{0 \text{ oppure } \geq 1}$$

se è una coppia di punti legata nel Dynkin Diagram

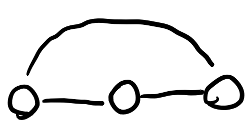
$$N_{points} > \sum_{j \neq i, j} \sqrt{M_{ij} M_{ji}} \geq N_{\text{coppie legate}}$$



SU(3) 1 coppia 2 punti



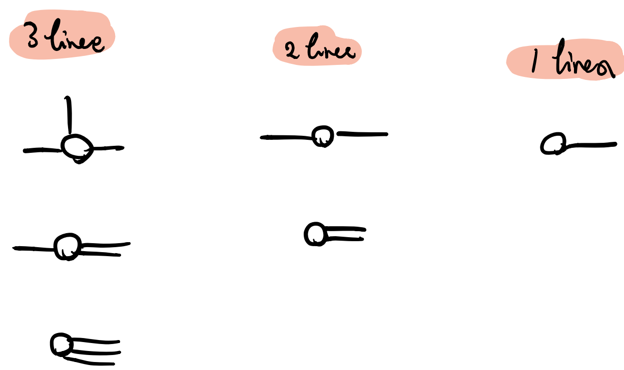
2 coppie 3 punti SU(4)

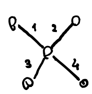


è vietato

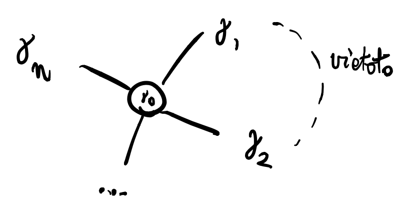
Lemma delle tre linee

Un punto non può avere più di tre linee



γ rappresentano le radici semplici. Ipotizzo che si possa fare un "4" 

dove il 4 può essere esteso a n



Noto che per il lemma dei cicli chiusi devo avere molti $\langle , \rangle$ nulli

$$\langle \gamma_k , \gamma_j \rangle = 0$$ altrimenti viene fuori un loop

Introduco $\hat{\gamma}_i = \gamma_i \dfrac{1}{\sqrt{\langle \gamma_i \gamma_i \rangle}}$ $\langle \alpha_i \alpha_i \rangle \langle \alpha_j \alpha_j \rangle > \langle \alpha_i \alpha_j \rangle^2 = \langle \alpha_i \alpha_j \rangle \langle \alpha_j \alpha_i \rangle$

γ_0 è linearmente indipendente dai γ_i, quindi la sua lunghezza è necessariamente più grande delle proiezioni quadrate

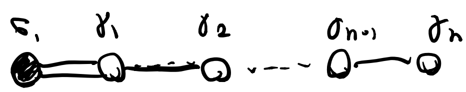
$$\langle \gamma_0 \gamma_0 \rangle > \sum_i \langle \gamma_0 \hat{\gamma}_i \rangle^2 = \sum_i \frac{\langle \gamma_0 \gamma_i \rangle}{\langle \gamma_i \gamma_i \rangle} \langle \gamma_i \gamma_0 \rangle$$

$$1 > \sum_i \overbrace{\frac{\langle \gamma_0 \gamma_i \rangle}{\langle \gamma_0 \gamma_0 \rangle}}^{\frac{1}{2} M_{0i}} \overbrace{\frac{\langle \gamma_i \gamma_0 \rangle}{\langle \gamma_i \gamma_i \rangle}}^{\frac{1}{2} M_{i0}}$$

$$4 > \underbrace{\sum_i M_{0i} M_{i0}}$$

somma delle linee che si emanano da γ_0 verso i γ_i (max 3!)

Lemma della contrazione

Se 

è presente si può ridurre l'intera linea di single-lines ad un solo punto

$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = \gamma$ somma delle radici semplici che voglio comporre

$$\langle \gamma \gamma \rangle = \sum_i \langle \gamma_i \gamma_i \rangle + 2 \sum_{i>j} \langle \gamma_i \gamma_j \rangle$$

è una stringa $\circ - \circ - \circ \cdots \circ - \circ$

quindi $\langle \gamma_i \gamma_j \rangle = -\langle \gamma_i \gamma_i \rangle$

$A_{ij} = -1$ sempre

$$= N \langle \gamma_1 \gamma_1 \rangle - 2 \underbrace{\left(\frac{N-1}{2} \right)}_{\text{numero di } i>j} \langle \gamma_1 \gamma_1 \rangle$$

$$= \langle \gamma_1 \gamma_1 \rangle = \langle \gamma_k \gamma_k \rangle \quad \forall k$$

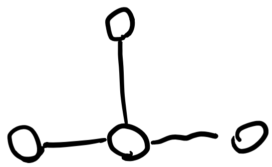
quindi

- la somma dei γ_i mi da un vettore di uguale lunghezza a ciascun γ_i
- la somma dei γ_i ha uguale proiezione su un vettore che prima stava collegato a γ_1 $\quad \langle \sigma, \gamma \rangle = \sum_i \langle \sigma \gamma_i \rangle$

$$= \langle \sigma \gamma_1 \rangle$$

perché σ e $\gamma_{n>1}$ non possono essere collegati in ogni caso per il lemma dei loop.

Lemma delle biforcazioni

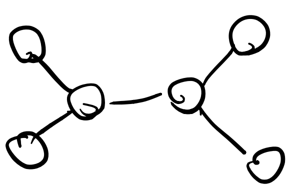
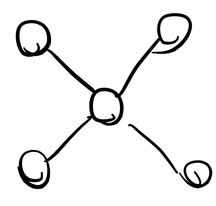


può essere usato solo una volta

può essere usato solo una volta

Banalmente col lemma delle contrazioni

 si potrebbe fare diventare 

 si potrebbe fare diventare 

Questi lemmi e il $\det M \neq 0$ riducono i diagrammi di Dynkin possibili a

$A_N \sim SU(N+1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

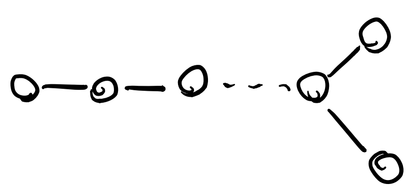
B_N

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & 2 & -2 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

C_N

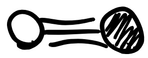
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & 2 & -1 \\ & & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

D_N

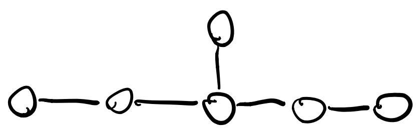


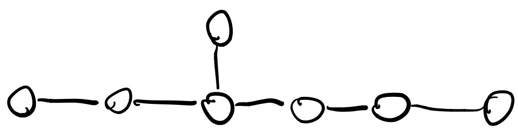
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

-1 0 2/

G_2 

F_4 

E_6 

E_7 

E_8